PROBABILIDAD y ESTADÍSTICA II

UNIDAD Nº1

Licenciatura en Enseñanza de la Matemática
Año 2011
Mg. Lucía C. Sacco

UNIDAD Nº1

Variables aleatorias bidimensionales y n-dimensionales. Distribuciones.

Variables aleatorias bidimensionales discretas y continuas. Definiciones y ejemplos. Distribución de probabilidad puntual conjunta. Distribuciones marginales. Variables aleatorias independientes.

Propósitos:

Brindar oportunidades para la construcción de herramientas que permitan:

- Definir variables aleatorias n-dimensionales.
- Identificar situaciones reales en las que intervienen variables aleatorias bidimensionales.
- Analizar distribuciones de probabilidades de variables aleatorias discretas y continuas.
- Resolver situaciones problemáticas de diferentes distribuciones de probabilidad de variables aleatorias discretas y continuas.

Variables aleatorias bidimensionales

A veces es necesario trabajar con probabilidades que involucran a más de una variable aleatoria al mismo tiempo.

Ejemplos

Podemos querer calcular cuál es la probabilidad de que:

- una persona elegida al azar mida entre 1.70 y 1.80 m y pese entre 80 y 90 kg.
- una persona que pesa entre 70 y 80 kg mida menos de 1.60 m.

Ambas discretas

El nº de alumnos que cursan la LEM y el nº de materias aprobadas de cada uno

Ambas continuas

El peso de una persona y su altura

Una discreta y una continua

La longitud de las carreteras y el número de estaciones de servicio que hay en cada una

Tipos de distribuciones

Así como en las variables aleatorias unidimensionales nos interesa estudiar cómo se distribuye la probabilidad de cada uno de los valores posibles, en las variables aleatorias bidimensionales nos interesa lo mismo, con la salvedad de que ahora los valores posibles son pares de valores, o bien vectores de dimensión 2. Notemos que:

1) la probabilidad de un determinado par de valores no puede ser menor que cero.
2) la suma de las probabilidades de todos los pares de valores da 1, porque al hacer el experimento siempre sale uno de los pares posibles.

Cuando se estudian conjuntamente dos variables, surgen tres tipos

Distribuciones conjuntas

Distribuciones marginales

Distribuciones condicionadas

Función distribución conjunta

Se define Función Distribución Conjunta de la variable bidimensional (X, Y) como:

$$\begin{array}{llll} F_{XY}: & \Re^2 & \rightarrow & \Re \\ & (x,y)\in\Re^2 & \rightarrow & F_{XY}(x,y)=P(X\leq x, Y\leq y) \end{array}$$

Distribuciones conjuntas de variables aleatorias discretas

- $F_{XY}(x,y)$ es una función que a cada par de valores posibles le asigna su probabilidad.
- $F_{XY}(x,y)$ es una función de probabilidad discreta conjunta si y solo si cumple con:

i) $F_{XY}(x,y)\geq 0 \quad \forall(x,y)$

ii) $\sum_{x}\sum_{y} F_{XY}(x,y)=1$

iii) $Si\ A\subset D_{XY} \Rightarrow P(A)=\sum\sum_{(x,y)\in A} P(x,y)$

Siendo A un subconjunto de D_{XY} (dominio de la función F_{XY} incluido en R^2)

Ejemplo 1

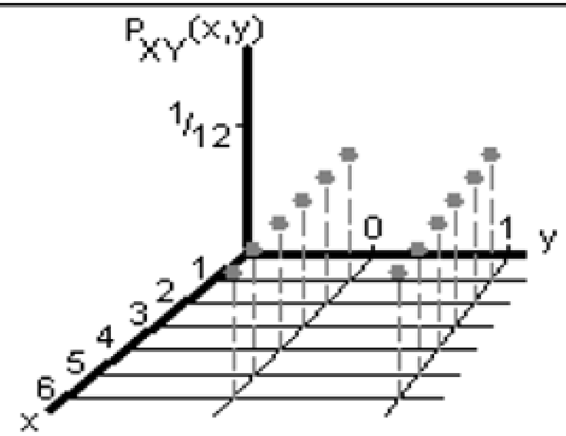
Siendo X: el número que sale al tirar un dado honesto e Y: la cantidad de caras que salen al tirar una moneda:

X: puede tomar del 1 a 6.

Y: cara (0) y ceca (1).

Hay doce eventos diferentes. Cada probabilidad de que salga un número y una de las caras de las monedas es 1/12.

		Y	
	P_{XY}	0	1
X	1	$^1/_{12}$	$^1/_{12}$
	2	$^1/_{12}$	$^1/_{12}$
	3	$^1/_{12}$	$^1/_{12}$
	4	$^1/_{12}$	$^1/_{12}$
	5	$^1/_{12}$	$^1/_{12}$
	6	$^1/_{12}$	$^1/_{12}$



Distribuciones conjuntas de variables aleatorias continuas

Análogamente a la función de densidad de una variable aleatoria unidimensional, para obtener probabilidades a partir de la **función de densidad** de una variable aleatoria bidimensional debemos integrarla.

En vez de una integral simple, es una integral doble. Es decir, la integral de la función de densidad $f_{XY}(x,y)$ en un dominio D del plano XY, da la probabilidad de que la variable aleatoria XY asuma un valor comprendido en ese dominio.

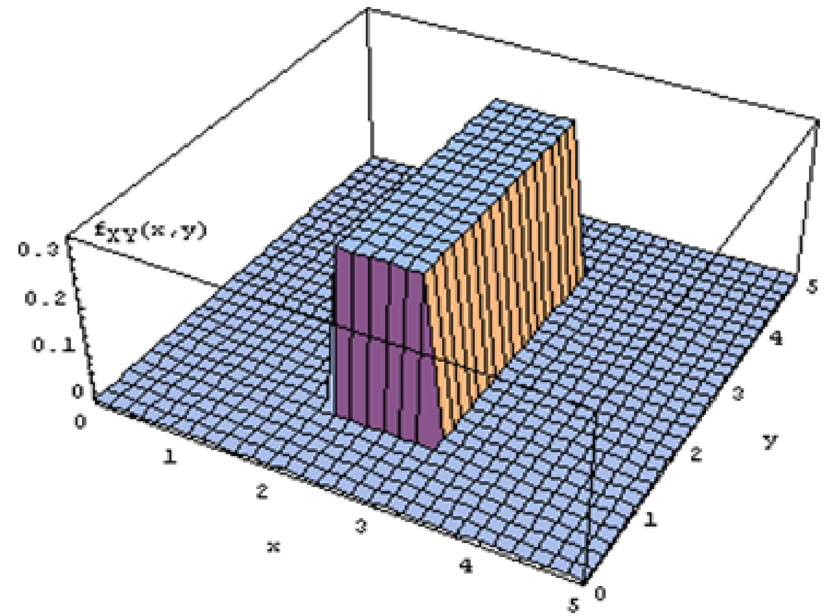
$f_{XY}(x,y)$ es una función de densidad de probabilidad continua conjunta si y solo si cumple con:

i) $f_{XY}(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y)$

ii) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dxdy = 1$

iii) $P(A) = \iint_{A} f_{XY}(x,y)dxdy$

Siendo A un subconjunto de R^2 incluido en el dominio de $f_{XY}(x,y)$



Ejemplo 2

Se toma un punto al azar del plano XY, con la primera componente entre 2 y 3, y la segunda entre 1 y 4, y se toma la variable aleatoria X como la componente x del punto, y la variable aleatoria Y como la componente y del punto.

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{3} & si\ \ 2<x<3;1<y<4\\ 0 & \forall otro\ x,y\end{cases}$$

Luego la probabilidad de que el par (X,Y) caiga en un determinado intervalo es la integral de la altura $f_{XY}(x,y)$ en dicho intervalo.

Sobre todo el recinto de integración

Para un recinto incluido en D

Se cumplen las propiedades de la función densidad

Distribuciones marginales

A veces, nos puede interesar conocer la distribución de una componente por separado, sin tener en cuenta a la otra componente. Eso se denomina "marginar", y la distribución de la variable unidimensional por separado se llama "distribución marginal"

Distribuciones marginales de variables aleatorias discretas

Sea la variable aleatoria bidimensional (X, Y) distribuida según $P_{XY}(x,y)$, la distribución de X, también llamada **distribución marginal de X,** es $P_X(x) = \sum_{y=-\infty}^{+\infty} P_{XY}(x,y)$ para cada valor x de la variable aleatoria X. Análogamente, la **distribución marginal de Y** es $P_Y(y) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} P_{XY}(x,y)$ para cada valor y de la variable aleatoria Y. Es decir, para cada valor posible de la variable aleatoria cuya distribución se desea hallar, se suman las probabilidades conjuntas de ese valor con cada uno de los valores posibles de la otra variable.

Ejemplo 3

Si la distribución conjunta de X e Y es la siguiente, hallar la distribución de X y la distribución de Y por separado.

P_{XY}		Y	
		20	**30**
X	**1**	0,1	0,3
	2	0,4	0,2

Distribuciones marginales de variables aleatorias continuas

La marginación de variables continuas es análoga a la de las variables discretas, pero puede acarrear algunas dificultades adicionales.

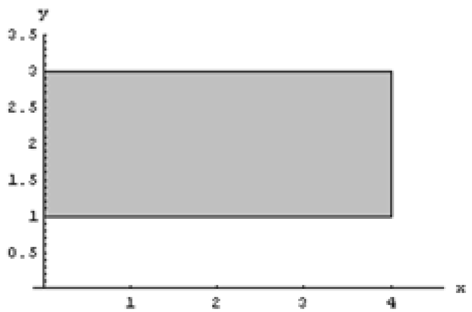
Sea la variable aleatoria bidimensional (X, Y) distribuida según $f_{XY}(x,y)$:

- la distribución de X (también llamada distribución marginal de X) es $f_X = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy$ para cada región del dominio de X donde no cambien los límites de integración de $f_{XY}(x,y)$ con respecto a Y.
- Análogamente, la distribución de Y es $f_Y = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx$ para cada región del dominio de Y donde no cambien los límites de integración de $f_{XY}(x,y)$ con respecto a X.

Ejemplo 4

Sea la siguiente distribución:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{8} & si \quad 0 < x < 4,\ 1 < y < 3 \\ 0 & \forall\ otro\ x, y \end{cases}$$



Calcular $f_X = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy$ y $f_Y = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx$

Distribuciones condicionadas

Distribución condicional para variables aleatorias continuas

Sean X, Y variables aleatorias continuas, se define:

$$f_{X/Y}(x,y)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}$$

La función de densidad condicional de X dado Y determina la correspondiente distribución condicional de probabilidades, es decir, nos dice cómo se distribuyen las probabilidades de los valores de X, una vez que se conoce el valor que ha tomado Y.

Ejemplo 5

Se realiza el experimento de tomar una persona al azar y medir su peso y su altura. Se definen los sucesos A y B. Suceso A: La persona pesa más de 60kg. Suceso B: La persona mide 1.90 m. Llamemos X a la variable aleatoria peso e Y a la variable aleatoria altura.

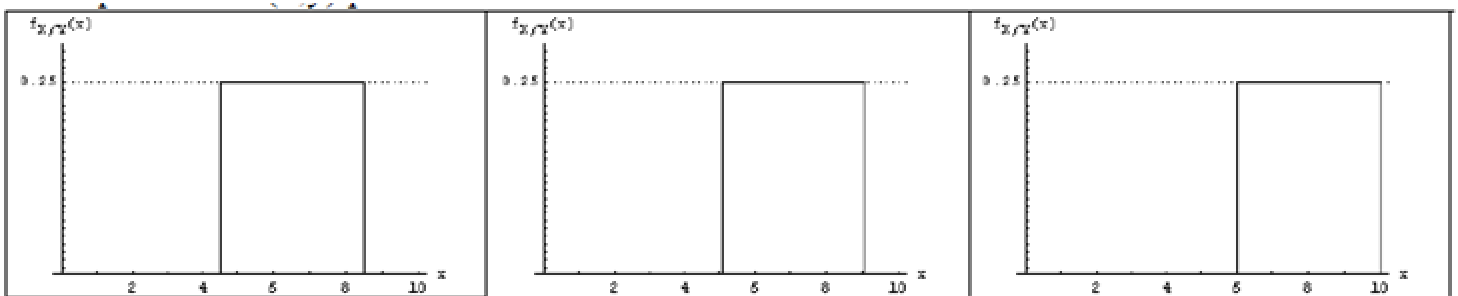
Donde Y está expresada en metros y X está expresada en decenas de kg.

La distribución conjunta es $f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}y & 0<y<2, \quad 3y<x<3y+4 \\ 0 & \forall \ otro \quad x,y\end{cases}$

Sabiendo que ocurre el suceso B, ¿cuál es la distribución condicional del peso?

Esa es la función de densidad condicional de X dado Y. En ella podemos poner cualquier valor permitido de Y, y obtendremos la distribución de probabilidades para X dado que conocemos el valor de Y. Por ejemplo, si en esa función ponemos y = 1.8, obtendremos la distribución del peso X de las personas que miden 1.80m.

Grafiquemos $f_{X/Y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4} & 0<y<2,\ 3y<x<3y+4\\ 0 & \forall\ otro\ x,y\end{cases}$ para distintos valores de Y:



y = 1.50 m	y = 1.70 m	y = 2 m

Observamos que para distintos valores de la altura, las probabilidades de los valores posibles del peso son distintas. En este caso vemos que a medida que la altura aumenta, la masa de probabilidades de los pesos se va corriendo hacia los valores grandes.

Distribuciones condicionadas

Distribución condicional para variables aleatorias discretas

Sean X, Y variables aleatorias discretas, se define $P_{X/Y}(x,y)=\dfrac{P_{XY}(x,y)}{P_Y(y)}$

La función de probabilidad condicional de X dado Y determina la correspondiente distribución condicional de probabilidades, es decir, nos dice cómo se distribuyen las probabilidades de los valores de X, una vez que se conoce el valor que ha tomado Y.

Ejemplo 6

Se tienen las variables aleatorias discretas X e Y, cuya distribución conjunta es la que se presenta en la siguiente tabla. Calcular $P_{X/Y}(x,y)$.

P_{XY}		Y		
		0	**2**	**4**
X	**1**	0,25	0,05	0,3
	2	0,15	0,1	0,15

Independencia de variables aleatorias

Para X, Y variables aleatorias continuas

X e Y son estadísticamente independientes

<=>

$$f_{X/Y}(x,y) = f_X(x)$$

<=>

$$f_{X/Y}(x,y) = f_Y(y)$$

<=>

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x).f_Y(y)$$

Para X, Y variables aleatorias discretas

X e Y son estadísticamente independientes

<=>

$$P_{X/Y}(x,y) = P_X(x)$$

<=>

$$P_{X/Y}(x,y) = P_Y(y)$$

<=>

$$P_{XY}(x,y) = P_X(x).P_Y(y)$$

Variables continuas

Ejemplo 7

Analizar para cada una de las siguientes distribuciones si las variables X e Y son independientes o no:

a) $f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{4}(x-y) \;\; si \;\; 0<x<2; 0<y<x \\ 0 \qquad \forall otro \; x,y \end{cases}$

b) $f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{72}xy^2 \;\; si \;\; 0<x<4; 0<y<3 \\ 0 \qquad \forall otro \; x,y \end{cases}$

Variables discretas

Ejemplo 8

Analizar para cada una de las siguientes distribuciones si las variables X e Y son independientes o no:

a)

X	P_{XY}	Y 1	Y 2	Y 3
	1	0.12	0.1	0.08
	2	0.28	0.2	0.22

b)

X	P_{XY}	Y 1	Y 2	Y 3
	1	0.08	0.12	0.2
	2	0.12	0.18	0.3

Esperanza matemática

$$E(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{\infty} x \, . \, f_X(x)\,dx$$

Dada una distribución, su media o esperanza nos da una idea de cuál es el valor que podemos esperar obtener al hacer el experimento. A su vez, la distribución condicional es un modelo que, dado el valor arrojado por una variable, nos permite tener una distribución de probabilidades para la otra variable

$$E(X/Y) = \mu_{X/Y} = \int_{-\infty}^{\infty} x \, . \, f_{X/Y}(x,y)\,dx$$

Ejemplo 9

Obtener la esperanza de ambas distribuciones condicionadas.

Bibliografía

- Canavos, George. *Probabilidad y Estadística. Aplicaciones y Métodos*. México. McGraw Hill. 1988.
- Meyer Paul L. *Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas*. México. Addison Wesley Iberoamericana .1993.
- Walpole Ronald, Myers Raymond. *Probabilidad y Estadística*. México. Pearson Educación. 1999.
- Zylberberg, Alejandro. *Probabilidad y Estadística P(X)*. Nueva Librería.